ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

27/03/19

• ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας A καλείται ορθογώνιος αν $AA^t = I = A^t \cdot A$

Αν ο A είναι ορθογώνιος τότε ισχύει: $A^{-1} = A^t$
Το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων συμβολίζεται με $O(n)$

πχ. $I^t = I$, $I \cdot I = I$, $-I$ ορθογώνιος
$I + (-I) = O_{n \times n}$ όχι ορθογώνιος

Συμπέρασμα:
• Όταν προσθέτω ορθογώνιους δεν προκύπτει ορθογώνιος

$A, B \in O(n)$ $\quad AB \in O(n) \iff (AB)(AB)^t = I = AB \cdot B^t A^t = AI \cdot A^t =$
$= AA^t = I$.

Συμπέρασμα:
• Το γινόμενο ορθογωνίων είναι ορθογώνιος.

• ΕΡΩΤΗΜΑ: Στους μιγαδικούς τι γίνεται;
$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Ο A καλείται ορθομοναδιαίος (unitary)
αν $AA^{-t} = I$. Επίσης, $A^{-1} = A^{-t}$

Το σύνολο των ορθομοναδιαίων καλείται $U(n)$
Το γινόμενο ορθομοναδιαίων είναι πάλι ορθομοναδιαίος.

Ιδιότητες:

1) $\det(AA^t) = 1 \Rightarrow \det A \cdot \det A^t = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A = \pm 1$ (δεν ισχύει το αντίστροφο όμως, ότι δηλ. $\det A = \pm 1 \Rightarrow A$ ορθογώνιος));

2) Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\mathbb{R}^n$

γραμμές ← $\langle u, v \rangle = u \cdot v^t$ (1)

$\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

A ορθογώνιος : $A_{n\times n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$u_{1\times n} \mapsto \overset{\text{στήλη}}{A \cdot u^t}$

$\langle \underset{\text{γραμ.}}{(Au)^t}, \underset{\text{γραμ.}}{(Av)^t} \rangle \overset{(1)}{=} (Au)^t \overset{\text{στήλη}}{((Av)^t)^t} = \overset{\text{στήλη}}{(Au)^t} \cdot (Av) =$
$= u^t \underbrace{A^t A}_{I} v = u^t \cdot v = u^t (v^t)^t = \langle u^t, v^t \rangle$

Άρα για $u = v$ έχω: $\|u\|^2 = \langle u^t, u^t \rangle = \langle (Au)^t, (Au)^t \rangle =$
$= \|Au\|^2$

➡ Ο ορθογώνιος πίνακας ΔΕΝ αλλάζει το μήκος ενός διανύσματος.

3) Οι γραμμές κ' οι στήλες ενός ορθογώνιου πίνακα αποτελούν ορθοκανονική βάση: $AA^t = I$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \vdots \\ u_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \end{matrix}$$

$\|u_i\| = 1$ κ' $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ όταν $i \neq j$

Το ίδιο κ' για τις στήλες.

$AA^t = I \Rightarrow (a_{ij})(\underset{a_{ji}}{a'_{ij}}) = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Ζητάω το i-j στοιχείο του AA^t

$\delta_{ij} = c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} a_{jt} = \langle \underset{i \text{ γραμμή}}{(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})}, \underset{j \text{ στήλη}}{(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})} \rangle$

- $i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1 \Rightarrow \langle (a_{i1}, \dots, a_{in}), (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \rangle = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|(a_{i1}, \dots, a_{in})\|^2 = 1$ ∀ γραμμή

• $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \langle (a_{i1},\dots,a_{in}),(a_{j1},\dots,a_{jn})\rangle = 0$ άρα $(a_{i1},\dots,a_{in}) \perp (a_{j1},\dots,a_{jn})$

Από τη σχέση $A^tA = I$ έχω ότι οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Πχ: 1) $n=1$. $A=(1)$ ή $A=(-1)$ ορθογώνιοι

2) $n=2$ $A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $\det A = 1$ (μήκος 1, κάθετα)

$A' = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ $\det A' = -1$

3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{2}{7}&\frac{6}{7}\\-\frac{6}{7}&\frac{3}{7}&\frac{2}{7}\\\frac{2}{7}&\frac{6}{7}&-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$

4) Το γινόμενο ορθογωνίων είναι ορθογώνιος $O(n)$ ομάδα

5) Οι ιδιοτιμές του έχουν μήκος 1

Έστω λ η ιδιοτιμή του ορθογωνίου πίνακα A. Άρα έχει μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα u: $Au = \lambda u$ u στήλη

$$\left.\begin{array}{l}\langle (Au)^t, (Av)^t\rangle = \langle u^t, v^t\rangle \\ Au=\lambda u \Rightarrow (Au)^t = \lambda u^t\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \lambda u^t, \lambda u^t\rangle = \langle u^t, u^t\rangle$$

• Αν $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda^2\langle u^t, \cancel{u^t}\rangle = \langle u^t,u^t\rangle \neq 0$

$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ όταν η ιδιοτιμή είναι πραγματική.

• Αν $\lambda \in \mathbb{C}$: $\langle \lambda u^t, \lambda u^t\rangle = \langle u^t, u^t\rangle \Rightarrow \lambda\langle u^t, u^t\rangle = \langle u^t,u^t\rangle =$

$\Rightarrow \lambda\bar\lambda \langle u^t, \cancel{u^t}\rangle = \langle u^t,u^t\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda\bar\lambda = 1 \Rightarrow \|\lambda\| = 1$

Πχ: $\lambda = i$